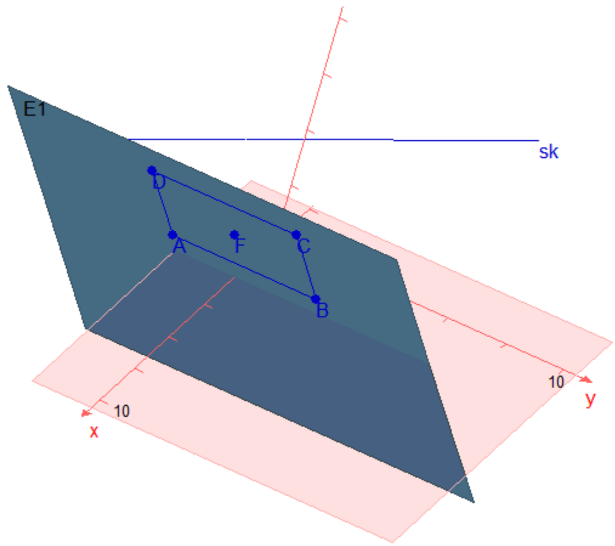
Zur Aufgabe S. 136/15c

Hier sind die Ebene E und die Gerade s_k gezeichnet.

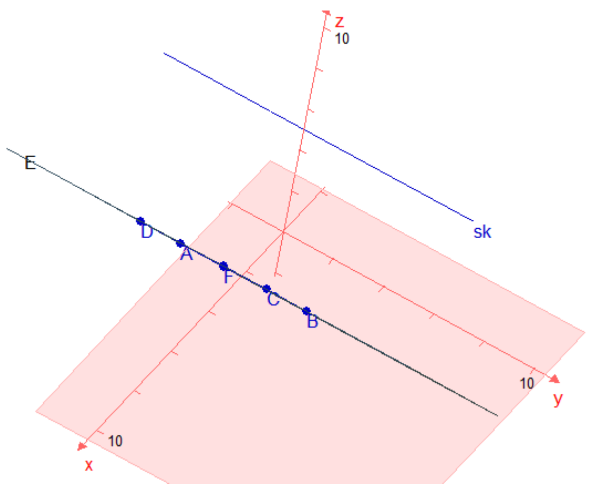


Die Lösung in der Schule war richtig. Es gibt keinen Punkt auf der Geraden s_k, so dass die Gleichung richtig wäre.
Der Weg die Gleichung wie heute zu lösen war richtig und hat zum richtigen Ergebnis geführt.

Man kann sich das auch weiter überlegen:

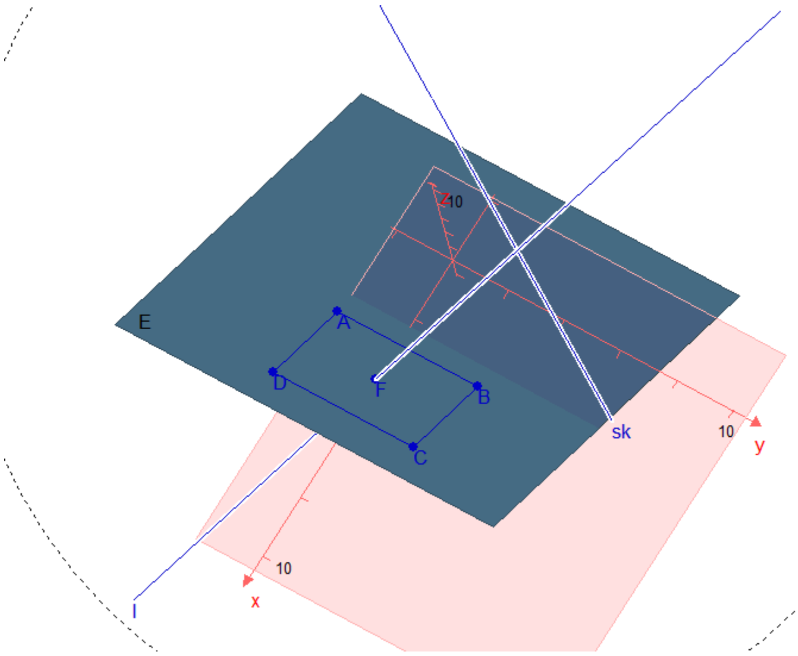
Der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene E, in der die Punkte A, B, C und D, also auch das Quadrat ABCD liegen. Der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene.

Die Gerade $s_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist parallel zur Ebene E. Dies zeigt man z.B. indem man die Koordinaten der Geraden s_k in die Normalform der Ebenengleichung der Ebene E (siehe b)) einsetzt: $4(3k) – 3(5+4k) -9 = 0$. Man vereinfacht diese Gleichung zu $-15 = 9$, was eine falsche Aussage ist, und nach unseren Überlegungen vom Donnerstag ist also s_k echt parallel zu E.



Die Gleichung in der Aufgabe $\overrightarrow{FS_k} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ besagt nun, dass der Vektor $\overrightarrow{FS_k}$ senkrecht zum Normalenvektor steht, also muss der Vektor $\overrightarrow{FS_k}$ in der Ebene liegen. Da die Gerade s_k echt parallel zur Ebene E ist und F in der Ebene E liegt, schaut der Vektor $\overrightarrow{FS_k}$ immer aus der Ebene heraus.

Die Gerade l verbindet F mit einem Punkt auf s_k. l schneidet E im Punkt F und geht durch die Ebene E.



Man kann auch zeigen, dass die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, also die zwei Richtungsvektoren der Ebene E und der Richtungsvektor der Geraden s_k linear abhängig sind:

Die Gleichung $a \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$=0 hat zum Beispiel als Lösung a = 0, b=1 und c=-1, also sind die drei Vektoren lineare abhängig oder komplanar. Drei komplanare Vektoren „liegen" in einer Ebene. (vgl. Buch s. 130)

Was mich heute zum Ende der Stunde stutzig gemacht hat war der Fall, dass ich von einem Punkt F immer ein Lot auf eine Gerade s_k, die F nicht enthält , machen kann.

Hierzu nimmt man wie beim Abstand einen beliebigen Punkt L auf der Geraden s_k , also $\vec{l} = \begin{pmatrix} 3k \\ 3+5k \\ 4+4k \end{pmatrix}$ und bildet den Vektor $\overrightarrow{FS_k} = \overrightarrow{s_k} - \vec{f} = \begin{pmatrix} -4{,}5+3k \\ 2{,}5+5k \\ 2+4k \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt dieses Vektors $\overrightarrow{FS_k}$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ der Geraden s_k muss 0 sein. Dies führt zu der Gleichung

$\overrightarrow{FS_k} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -13{,}5 + 9k + 12{,}5 + 2{,}5k + 8 + 16k = 7 + 50k = 0$ und damit $k = -\frac{7}{50}$.

Setzt man diesen Wert von k in s_k ein, so erhält man $L(-\frac{21}{50}; 2\frac{3}{10}; 4\frac{11}{25})$.
Dies ist auch der Schnittpunkt in obiger Zeichnung von l mit s_k.