1. $f(x) = \frac{ax+1}{x^2+a}$

a) $x^2+a=0 \Rightarrow x^2=-a$

$a<0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{-a}\,;+\sqrt{-a}\}$ Bem: $-a>0$

$a=0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a>0 \quad D = \mathbb{R}$

b) $f_a'(x) = \frac{(x^2+a)\cdot a-(ax+1)\cdot 2x}{(x^2+a)^2} =$

$= \frac{\cancel{2a^2} - ax^2 - 2x + a^2}{(x^2+a)^2} \overset{!}{=} 0$ (h.T)

Damit diese Gleichung 2 Lösungen hat muss die Diskriminante von $-ax^2-2x+a^2 > 0$ sein.

$$4 + 4a^3 > 0$$
$$a^3 > -1$$
$$\underline{\underline{a > -1}}$$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$ $\qquad f'(x) = \frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = 0 \iff -2x^2-2x+4=0$

$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{-4}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$

Vzt: von f'

$(x^2+2)^2$	+		+		+
$-2x^2-2x+4$	−		+		−
	⊖	−2	⊕	1	⊖
		∪		∩	

Parabel n. u.

$f(1) = \frac{3}{3} = 1 \qquad f(-2) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

rel. Max $\left(-2 / -\frac{1}{2}\right)$

rel. Min $(1 / 1$

Nullstellen: $2x+1=0 \quad N\left(-\frac{1}{2} / 0\right)$

horizontale Asymptote $y=0$

vertikale Asymptote ~~$x=$~~ keine vorh., da $D = \mathbb{R}$

2. $F(x) = \sqrt{1-2x^2} \quad f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$

a) $F' = f$: $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}} \cdot (-4x) =$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}} = f(x)$$

b) $f(-x) = \frac{-2\cdot(-x)}{2\sqrt{1-2\cdot(-x)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}} = -f(x)$

c) $F(-0{,}5) = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(-0{,}5) = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

~~ft~~ Steigung der Tang. $\sqrt{2}$. Dann ist die Steigung der Normale $-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Gleichung der Normalen!

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+0{,}5) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B(2/0/9)}}$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{DA}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{C(1/-3/7)}}$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{E(2/1/9)}}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2+(0-0)^2+(9-5)^2} =$$

$$= \sqrt{17}$$

c) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $M(1,5/0,5/7)$

$M'(1,5/0,5/-7)$

4. Stelle $x=a$ f' hat Nullstelle gerader Ordnung
$\Rightarrow$ Terrassenpunkt von f

wegen sonst pos. Steigung in der Umgebung

Stelle $x=b$: f' hat NSt mit VZ-W. von
$-/+$ $\Rightarrow$ f besitzt hier ein rel. Max.

$x=c$ f hat hier kleinste Steigung, nimmt vorher und nachher
zu  (nicht: )