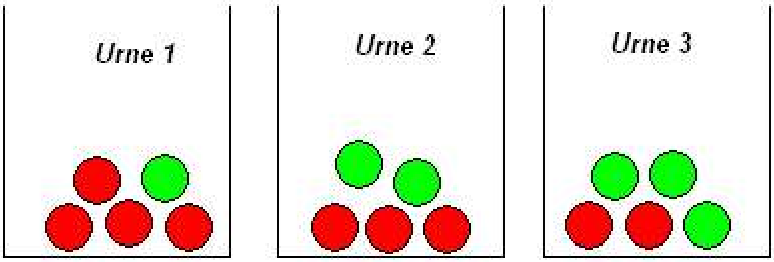
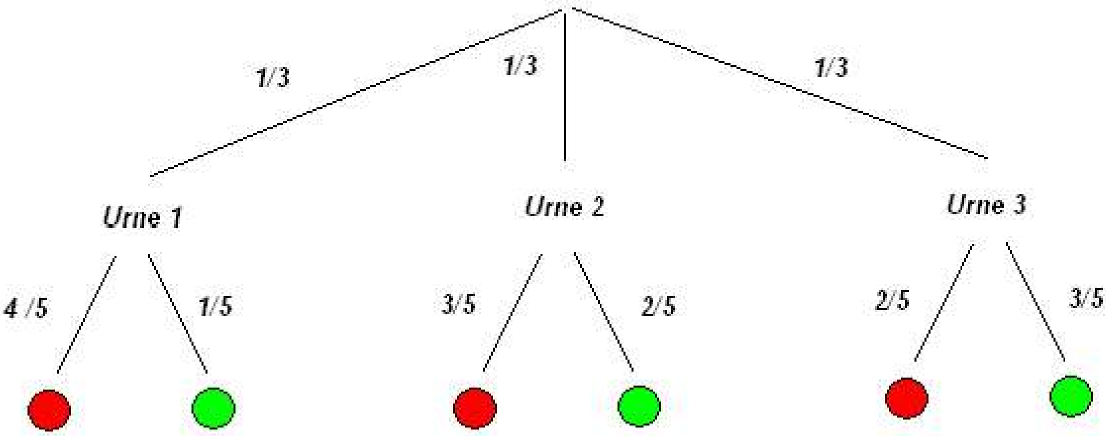
Der Dieb von Bagdad

Dem Dieb von Bagdad wird zur Wahl gestellt entweder sofort verurteilt zu werden oder in einem zweistufigen Experiment mit verbundenen Augen eine der drei Urnen zu wählen und anschließend eine Kugel. Zieht er eine grüne Kugel, so wird er freigelassen.

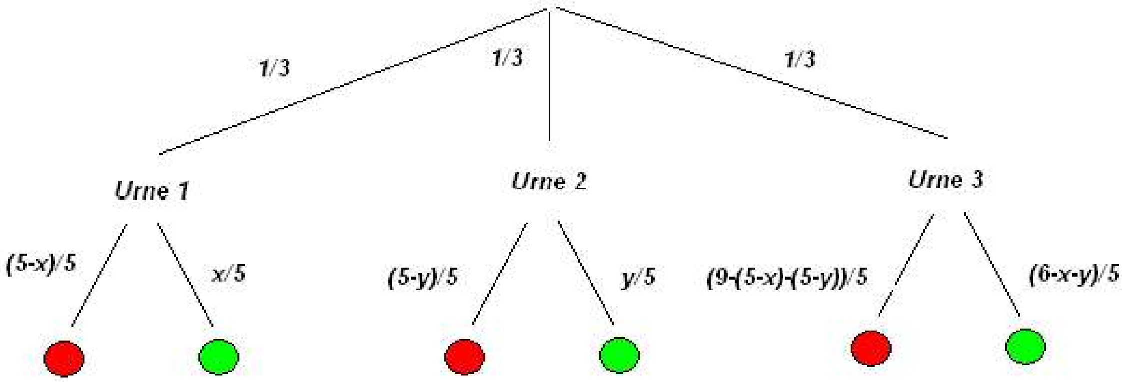




Nach den Pfadregeln ergibt sich die Wahrscheinlichkeit ohne Strafe davon zu kommen zu

$$1/3\,(1/5 + 2/5 + 3/5) = 2/5 = 40\ \%$$

Der Dieb bittet vor dem Ziehen umverteilen zu dürfen. Wir zeigen zunächst, dass bei jeweils gleicher Kugelzahl in den drei Urnen sich die Chance nicht erhöht:

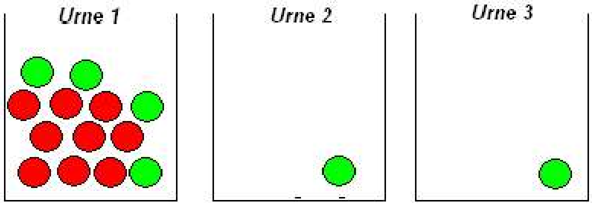


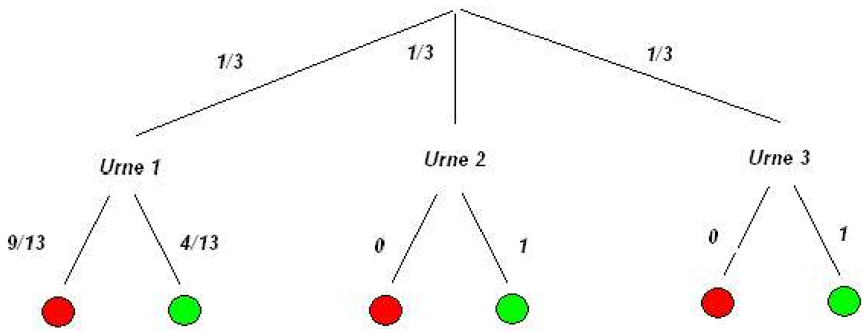
Nach den Pfadregeln ergibt sich die Wahrscheinlichkeit ohne Strafe davon zu kommen zu

$$1/3\ (x/5 + y/5 + (6-x-y)/5) = 2/5 = 40\ \%$$

Nun stellt sich die Frage, ob eine andere Aufteilung der Kugeln eine höher Wahrscheinlichkeit erbringt, um ohne Strafe davonzukommen.

Wir vermuten, dass bei extrem ungleicher Aufteilung die Wahrscheinlichkeit zumindest einen anderen Wert besitzen und berechnen die Wahrscheinlichkeit ohne Strafe davon zu kommen für den Fall:





Nach den Pfadregeln ergibt sich die Wahrscheinlichkeit ohne Strafe davon zu kommen zu

$$10/13 = 76{,}9\ \%$$

Es stellt sich nun allerdings die Frage, ob dies die maximale Wahrscheinlichkeit ohne Strafe davonzu kommen ist oder nicht und ob es ungünstigere Verteilungen gibt als gleich viele Kugeln in jeder Urne zu haben.Damit eine Entscheidung über Strafe oder nicht überhaupt möglich ist, muss in jeder Urne mindestens eine Kugel vorhanden sein.

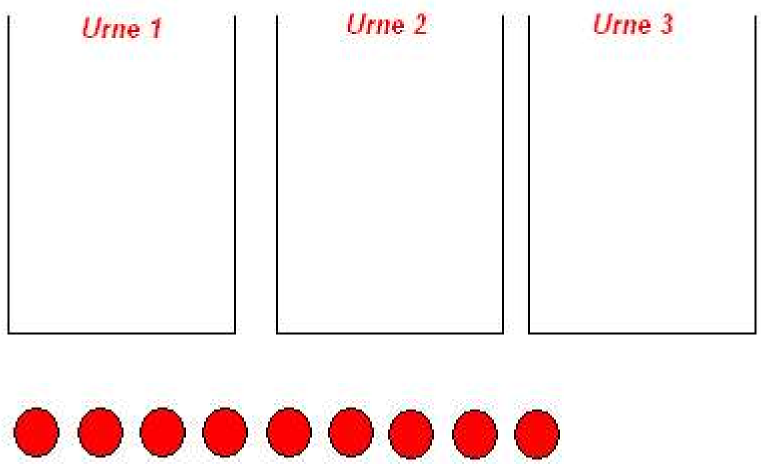
Ein Ansatz wie oben

$$p(\text{Freikommen}) = 1/3[g_1/(g_1 + r_1) + g_2/(g_2+r_2) + g_3/(g_3 + r_3)]$$

führt unter den Nebenbedingungen $r_1+r_2+r_3 = 9$ und $g_1 + g_2+g_3 = 6$
auf eine Funktion, die von 4 Variablen abhängig ist. Ein Maxiumum bzw. ein Minimum zu bestimmen ist mit den Methoden der Schulmathematik nicht mehr möglich.
Zudem ist zu beachten, dass die Lösungen für $r_1..r_3$ und $g_1 ... g_3$ ganzzahlig sein müssen und $r_i + g_i >=1$

Damit bietet es sich nur noch an das Problem numerisch in einer Tabellenkalkulation bzw. mit einem Programm zu lösen.

Vorüberlegungen



Auf wieviele Arten kann man die 9 roten Kugeln auf die 3 Urnen verteilen, wenn die Kugeln durchnummeriert sind?

N = 3^9 = 19683

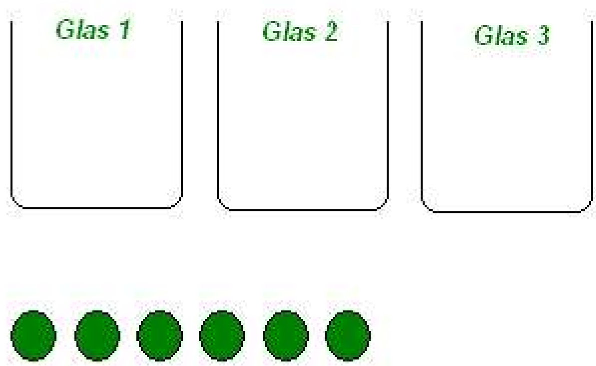
Bei dem Problem kommt es aber nicht darauf an, welche rote Kugel in welcher Urne liegt, sondern nur wieviele in jeder Urne liegen. Da es bei der Betrachtung des Problemes auch nicht daraufankommt in welcher Reihenfolge die Urnen stehen, reduziert sich das Problem auf die Frage, auf wieviele Arten kann man die 9 roten Kugeln auf die 3 Urnen verteilen kann, wenn nur die Anzahl der Kugeln je Urne eine Rolle spielt und die Reihenfolge der Urnen keine Rolle spielt.

Daher kann man für die Zahl der Kugeln für die einzelnen Urnen voraussetzen $n_1 >= n_2 >= n_3$.Unter dieser Bedingung gibt es folgende Möglichkeiten:

	Urne 1	*Urne 2*	*Urne 3*
1	9	0	0
2	8	1	0
3	7	2	0
4	7	1	1
5	6	3	0
6	6	2	1
7	5	4	0
8	5	3	1
9	5	2	2
10	4	4	1
11	4	3	2
12	3	3	3

Das sind 12 Fälle für die Aufteilung der roten Kugeln! Nun geht es darum wie man die sechs grünen Kugeln auf die drei Urnen verteilt.

In den Fällen in denen mindestens eine rote Kugel in einer Urne liegt, kann man diese auf beliebige Art und Weise in eines von drei Gläsern legen:



	Glas 1	*Glas 2*	*Glas 3*
1	6	0	0
2	5	1	0
3	4	2	0
4	4	1	1
5	3	3	0
6	3	2	1
7	2	2	2

In den Fällen, in denen nur in der dritten Urne eine rote Kugel fehlt, legt man zunächst eine grüne in die dritte Urne und verteilt die anderen fünf verbleibenden auf die drei Gläser. Es ergeben sich folgende Fälle:

	Glas 1	*Glas 2*	*Glas 3*
1	5	0	0
2	4	1	0
3	3	2	0
4	3	1	1
5	2	2	1

In dem Fall, dass in Urne 2 und 3 keine rote Kugel liegt, legt man jeweils eine grüne Kugel in die Urne 2 und 3 und verteilt die vier verbleibenden grünen Kugeln auf die drei Gläser! Es ergeben sich folgende Möglichkeiten:

	Glas 1	*Glas 2*	*Glas 3*
1	4	0	0
2	3	1	0
3	2	2	0
4	2	1	1

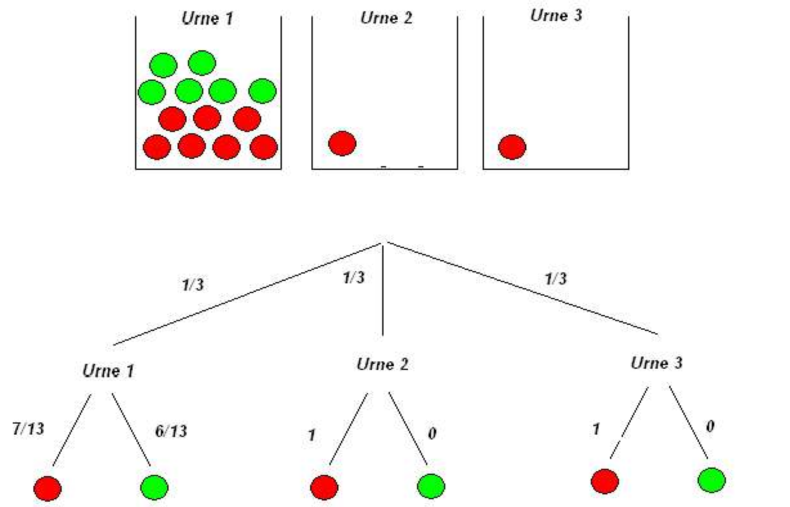
Nun gibt man jeweils den Inhalt eines Glases zu jeweils einer Urne hinzu. Da man jedes der drei Gläser zu jeweils einer Urne hinzugeben kann ergeben sich folgende Anzahlen von Möglichkeiten:

	Urne 1	*Urne 2*	*Urne 3*	*N*	*N*
1	9	0+1	0+1	4x3!	24
2	5	4	0+1	5x3!	30
3	6	3	0+1	5x3!	30
4	7	2	0+1	5x3!	30
5	8	1	0+1	5x3!	30
6	4	4	1	7x3!	42
7	5	3	1	7x3!	42
8	6	2	1	7x3!	42
9	7	1	1	7x3!	42
10	4	3	2	7x3!	42
11	5	2	2	7x3!	42
12	3	3	3	7x3!	42

Zwar gibt es noch immer die Möglichkeit identische Urnenzusammenstellungen zu erhalten, aber man hat die Zahl der Möglichkeiten insgesamt auf 438 reduziert und dennoch keine Möglichkeit ausgelassen.

Die mit einer Tabellenkalkulation berechneten Wahrscheinlichkeiten für diese 438 Fälle zeigt

1. Es gibt keine günstigere Möglichkeit als jeweils eine grüne in jede Urne und alle anderen Kugeln in eine einzige Urne!
2. Es gibt durchaus ungünstigere Verteilungen als die gleich viele Kugeln in jede Urne zu legen z. B.



Nach den Pfadregeln ergibt sich die Wahrscheinlichkeit ohne Strafe davon zu kommen zu

$1/3(6/13 + 0 + 0) = 6/39 = 15,3\,\%$