HA. $\quad x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2} x_0$

Ordnet man jedem $x \in \mathbb{D}$ den Ableitungswert $f'(x)$ zu,
dann hat man die Ableitungsfunktion $f' : x \longmapsto f'(x)$.

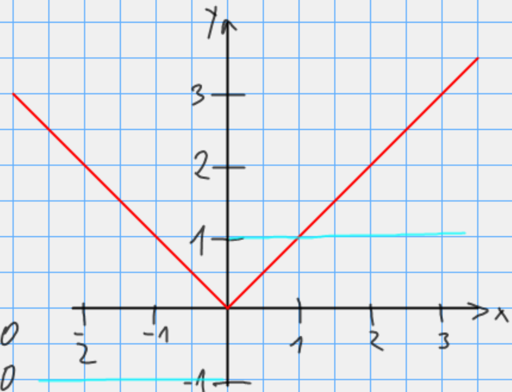
z.B. $\quad f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = \frac{1}{4} x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x$

Bemerkung zum Ableitungsbegriff

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Beispiel: $f(x) = |x|$



$$|2| = 2$$
$$|-3| = 3$$

Es ist $|x| = \begin{cases} -x & \text{für } x<0 \\ 0 & \text{für } x=0 \\ x & \text{für } x>0 \end{cases}$

Für $x<0$ ist $f(x) = -x$ mit Steigung -1 $\Rightarrow f'(x) = -1$

Für $x>0$ ist $f(x) = x$ mit Steigung 1 $\Rightarrow f'(x) = +1$

Was ist in $x=0$?

$$\lim_{h\overset{<}{\to} 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\overset{<}{\to} 0} \frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\overset{<}{\to} 0} \frac{-h}{h} = -1$$

man kommt von links an 0

$$\lim_{h\overset{>}{\to} 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\overset{>}{\to} 0} \frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\overset{>}{\to} 0} \frac{h}{h} = 1$$

man geht von rechts zu 0

Für $x=0$ hat die Betragsfunktion keine Ableitung.

Wir präzisieren den Ableitungsbegriff:

f ist in $[a;b]$ definiert und $x_0 \in [a;b]$.

Ist $\lim\limits_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

(der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist gleich dem rechtsseitigen Grenzwert), dann ist

$$\lim_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

die Ableitung von f in x_0.

HA S. 37/3a