Übungsaufgabe mit Lösungen

1. Gegeben ist die Funktion f durch ihren Funktionsterm f(x) = y = ln(32 - 2x²)

. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge, Nullstellen der Funktion und untersuchen Sie f auf Symmetrie. ca. 23 BE

Lösung:

$32-2x^2>0 \rightarrow x^2<16 \rightarrow -4<x<4 \rightarrow$ D =]-4;4[

Nullstellen: $32-2x^2=1 \rightarrow x^2=\frac{62}{4} \rightarrow x=\frac{\pm 1}{2}\sqrt{62}$

Symmetrie:

$f(-x)=\ln(32-(-x)^2)=\ln(32-x^2)=f(x) \rightarrow G_f\, ist\ symmetrisch\ zur\ y-Achse$

1.2. Bestimmen Sie f´(x) und Lage und Art des relativen Extrempunktes.

Lösung:

$$f\,'(x)=\frac{1}{32-x^2}\cdot(-2x)=\frac{-2x}{32-x^2}$$

notwendige Bedingung: f´(x)= 0 → -2x = 0 → x = 0

Nenner: in D_f immer positiv
Zähler: links von der Null positiv, rechts negativ

Bruch: links von der Null positiv, rechts negativ

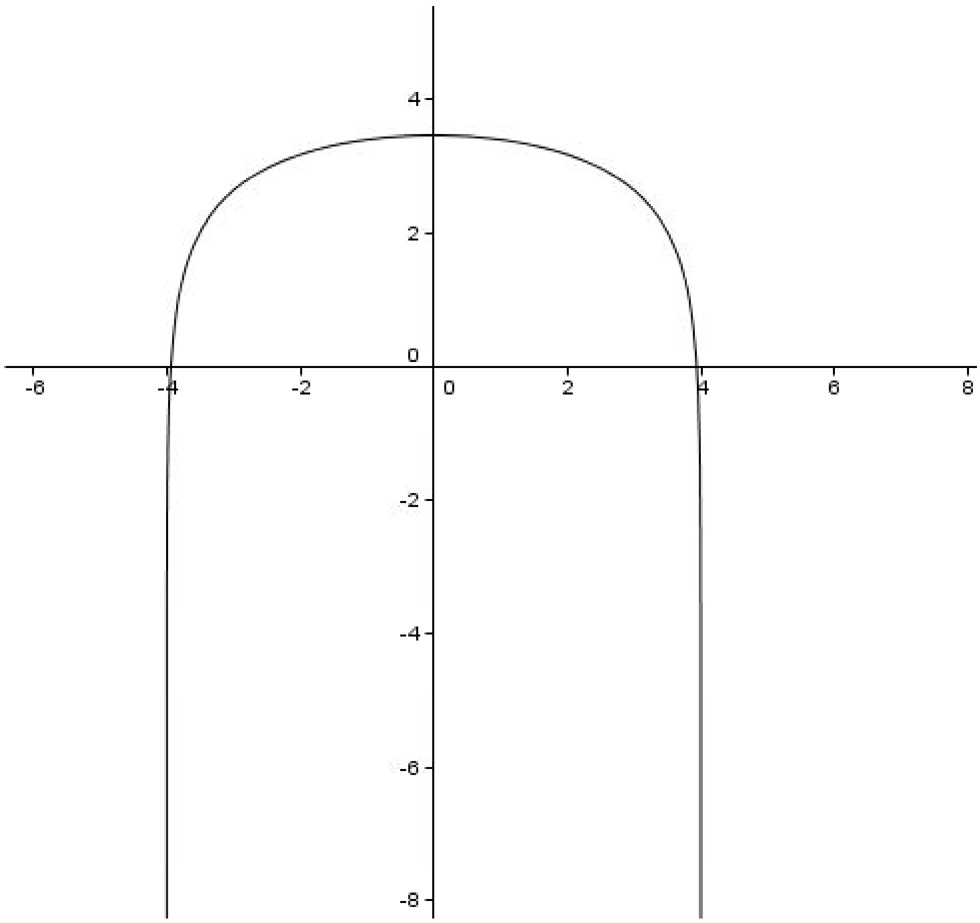
Also liegt bei x = 0 ein relatives Maximum vor

f(0) = ln (32 – 0) = ln 32 = 5 ln 2 → Max(0/5 ln 2)

1.3. Bestimmen Sie $\lim\limits_{h\rightarrow 0} f(4-h)$ und skizzieren Sie unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse den Graphen der Funktion f.

Lösung:

$$\lim_{h\rightarrow 0} f(4-h)=\lim_{h\rightarrow 0} \ln(4-(4-h)^2)=\lim(h\rightarrow 0)(8h-h^2)$$
$$(¿\,Eile\ nicht\ tiefgestellt)=-\infty$$



1.4. Begründen Sie anhand des Graphen, dass f auf dem Intervall] - 4; 0] umkehrbar ist und bestimmen Sie den Funktionsterm $f^{-1}(x)$ der zugehörigen Umkehrfunktion, sowie deren Definitions- und Wertemenge und zeichnen Sie ihren Graphen in das gleiche Koordinatensystem ein wie den Graphen von f.

Lösung:

Da G_f auf dem Intervall]-4;0[streng monoton steigend ist, ist f auf diesem Intervall umkehrbar.

$D_f = W_{f^{-1}}$ =]-4;0] $W_f = D_{f^{-1}}$ =] $-\infty$; 5 ln 2]

Bestimmung des Termes der Umkehrfunktion:

x = ln (32 – y^2) → $e^x = 32 - y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{32 - e^x}$ Da die Wertemenge der Umkehrfunktion im Negativen liegt, ist das Pluszeichen auszuschließen!

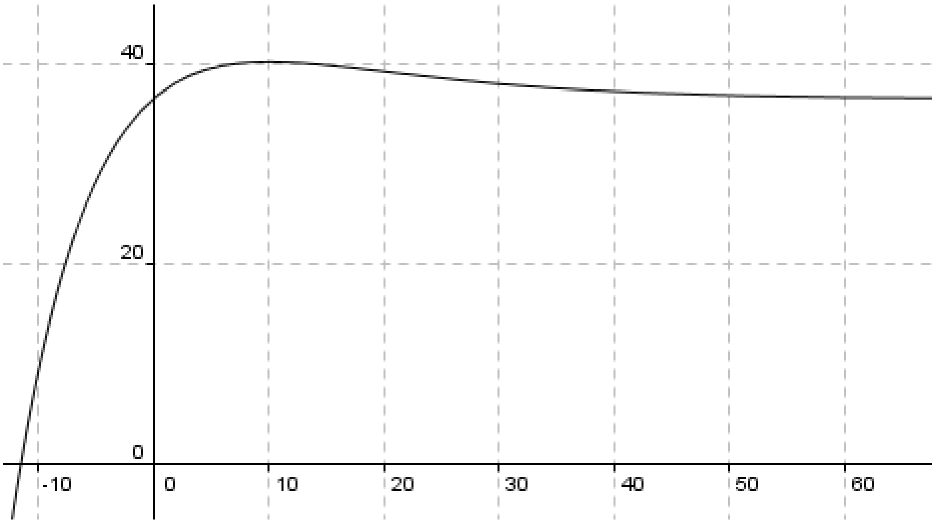
Den Graph der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung des linken Teils des Graphen unter 1.3. an der Geraden y = x.

2. Die normale Körpertemperatur eines gesunden Menschen beträgt 36,5 ° C. Die Funktion f mit

ca. 8 BE

$$f(t) = 36{,}5 + t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$$ und ihr Graph

beschreibt modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve bei einem Erkrankten. Dabei ist $t \geq 0$ die Zeit in Stunden nach Ausbruch der Krankheit und f(t) die Temperatur in °C



2.1. Bestimmen Sie den Term der Ableitungsfunktion f´(t) und vereinfachen Sie diesen und beschreiben Sie, welche Bedeutung f´(t) für den Verlauf des Fiebers besitzt.. Zusatz: Wann wird die Temperatur maximal? Wie hoch ist sie?

Lösung:

Unter Anwendung von Produkt- und Kettenregel erhält man:

$$f'(t) = t \cdot e^{-0{,}1t} \cdot (-0{,}1) + e^{-0{,}1t} = e^{-0{,}1t} \cdot (-0{,}1t + 1)$$

f´(t) hat folgende Bedeutung:

positive Werte – Stärke der Zunahme pro Zeiteinheit (Temperaturgradient)
negative Werte – Stärke der Abnahme pro Zeiteinheit

relatives Maximum: f´(t) = 0 → t = 10 , $f(10) = 36{,}5 + 10 \cdot e^{-1} \approx 40{,}18$
Da der erste Faktor von f´(t) nie Null wird und der zweite Faktor bei t = 10 von „+“ nach „-“ wechselt, handelt es sich um ein rel. Maximum.

Also: Nach 10 Stunden wird die maximale Temperatur von 40, 18 ° C erreicht.

2.2. Um die Wirksamkeit eines Medikamentes beurteilen zu können muss in einer Studie bekannt sein, wann die Körpertemperatur ohne Einsatz des Medikamentes wieder unter 38° C fällt. Da die Gleichung f(t) = 38 nicht elementar lösbar ist, ist ein Näherungsverfahren zu verwenden.

Geben Sie die Gleichung der Funktion g für dieses Näherungsverfahren an und erläutern Sie (ohne weitere Rechnung) anhand des obigen Graphen für welchen Startwert man überhaupt keine Lösung erhält bzw. für welche Startwerte man einen nicht brauchbaren Startwert erhält.

Lösung: Als ein Verfahren eignet sich das Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung.

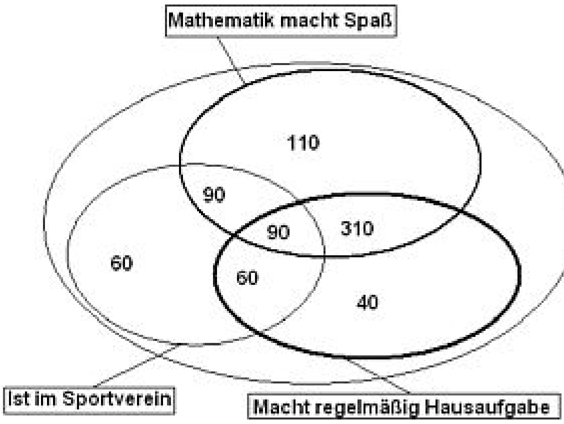
Als Gleichung der Funktion g(t) wählt man g(t) = f(t) – 38. Als sinnvollen Startwert wählt man t>10, also beispielsweise t = 15 mit g(15) = 39,85 - 38 = 1,85 und g´(15) = f´(15)= -0,68

Als ersten Näherungswert erhält man dann: $x_1 = 15 - \frac{39{,}85}{(-0{,}68)} \approx 17{,}7$ [h]

Ab hier kein Klausurstoff mehr – aber Übungsaufgabe bis nach den Ferien
lösbar mit Grundwissen aus der Mittelstufe

3. Im unten stehenden Diagramm ist das Ergebnis einer Umfrage unter 1000 Schülern einer großen Schule.

ca. 10 BE



Die Fragen lauteten: „Machst du regelmäßig Hausaufgaben?“, Macht dir Mathematik in der Schule Spaß?“ und „Bist du aktives Mitglied in einem Sportverein ?“

a) Ein befragter Schüler wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der befragte Schüler alle drei Fragen mit „nein“ beantwortet und mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er in einem Sport verein und macht ihm Mathematik Spaß?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler dem Mathematik Spaß macht regelmäßig seine Hausaufgaben macht.

c) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E1 =„Macht regelmäßig Hausaufgabe“ und E2 = „Mathematik macht Spaß“ stochastisch abhängig sind oder nicht.

4. Ca. 10 BE

Geburten nach Monaten

	1990	2000	2010
Januar	75 800	65 715	55 273
Februar	70 491	62 509	50 314
März	76 630	64 465	55 486
April	72 614	61 215	52 020
Mai	76 566	65 004	56 054
Juni	73 072	63 467	57 531
Juli	81 098	67 564	61 918
August	81 563	68 256	59 845
September	80 349	66 465	61 125
Oktober	76 756	62 978	58 816
November	70 483	58 676	54 576
Dezember	70 253	60 685	54 989
Jahr	905 675	766 999	677 947

Eine Nahrungsmittelfirma möchte unter den Eltern der im Jahr 2010 geborenen Kindern eine Umfrage über die Ernährungsgewohnheiten ihrer Kleinkinder machen.
.
a) Berechnen Sie die relative Häufigkeit von im Mai des Jahres 2010 Geborenen an allen Geburten des Jahres 2010 und nehmen Sie diesen auf 0,1 % gerundeten Wert als Wahrscheinlichkeit für eine

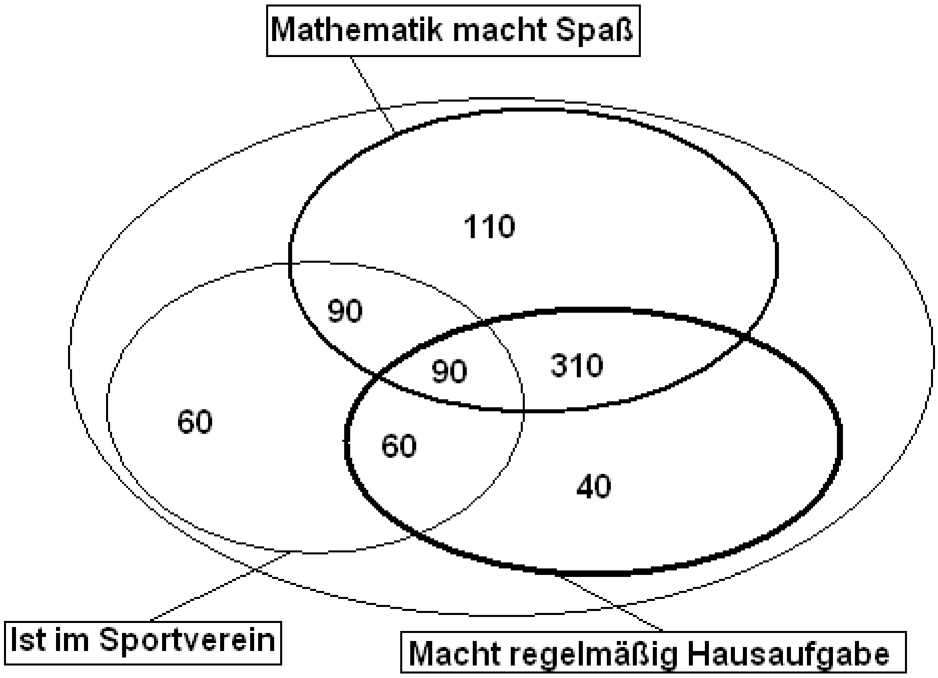
Geburt im Mai.

b) Wie viele Eltern muss die Nahrungsmittelfirma mindestens anschreiben, damit mit mehr als 99,9 %-iger Wahrscheinlichkeit mindestens 1 Kleinkind dabei ist, das im Monat Mai geboren wurde. [Bei dieser Aufgabe sind die Geburtenzahlen so groß, dass man näherungsweise ZmZ annehmen kann]

b) Es werden 200 Eltern angeschrieben. Es sind 4 Elternpaare dabei, deren Kind im Mai geboren wurde. Aus den angeschriebenen sollen 3 Elternpaare einen Geschenkgutschein erhalten, die zufällig aus einer Lostrommel gezogen werden.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

i) kein Elternpaar eines im Mai geborenes Kindes den Gutschein erhält?
ii) genau ein Elternpaar eines im Mai geborenen Kindes den Gutschein erhält?
iii) genau zwei.


Mathematik macht Spaß
110
90
90
310
60
60
40
Ist im Sportverein
Macht regelmäßig Hausaufgabe