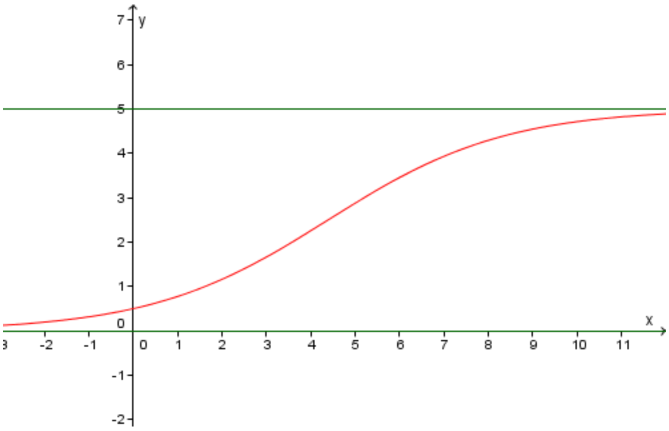
Lösung zu Aufgabe S. 167/20

Gegeben ist die Funktion $f: x \to \frac{5}{1+9e^{-\frac{1}{2}x}}$ mit x∈ℝ. Ihr Graph ist skizziert.

Hinweis: Der im Buch skizzierte Graph passt nicht zum Funktionsterm. Skizziert ist der Graph zur Funktion $f: x \to \frac{6}{1+9e^{-\frac{1}{2}x}}$.

Der Graph zur gegebenen Funktion $f: x \to \frac{5}{1+9e^{-\frac{1}{2}x}}$ schaut so aus:



Da man bei der Bearbeitung der Aufgabe einiges aus dem Funktionsgraph ablesen muss, wird für die Aufgabe er Funktionsgraph zu Grunde gelegt. Es wird also die Funktion $f: x \to \frac{6}{1+9e^{-\frac{1}{2}x}}$ besprochen.

a) Wegen $\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = \infty$ ist $\lim_{x\to-\infty} f(x)$= 0 und

wegen $\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0$ ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 6$

Die Asymptoten sind dann y = 0 und y = 6.

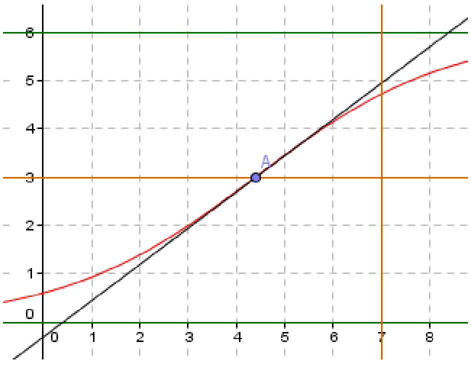
b) Da mit wachsenden x-Werten auch die f(x)-Werte zunehmen ist f streng monoton zunehmend.

Damit ist f'(x) > 0 für x∈ℝ.

Für ganz kleine x (x<<0) steigt f nur ganz schwach an, also ist f'(x) ungefähr 0. Ab -2 wird die Steigung etwas größer und nimmt bei x = 4,4 ihren größten Wert an, danach wird die Steigung wieder kleiner und G_f nähert sich der Asymptote y = 5 an, dabei wird f'(x) ≈ 0.

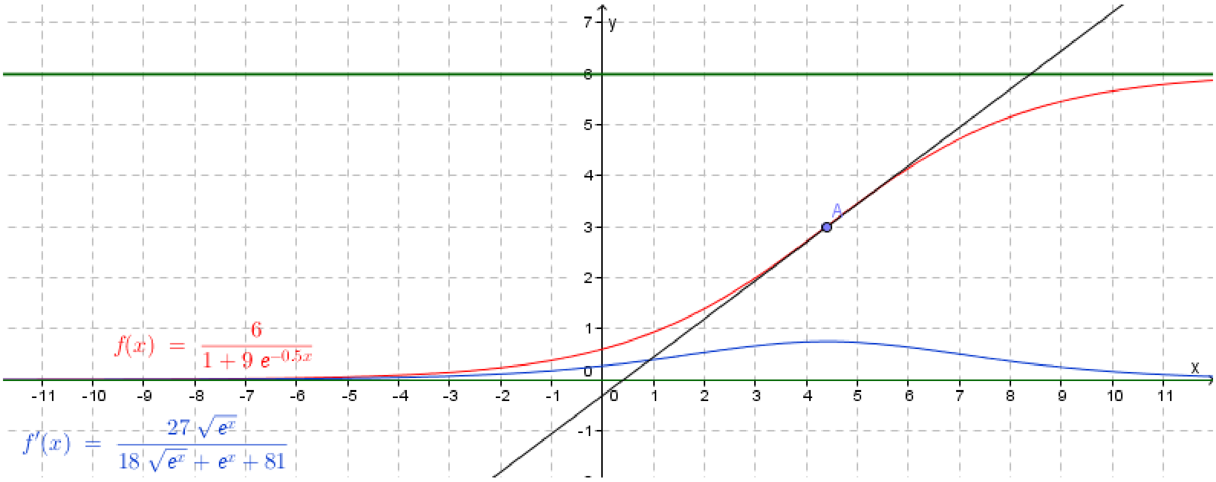
c) 4 ln(3) = 4,394449… ≈ 4,4. Es ist f(4 ln(3)) = 3.

In der Zeichnung legt man eine Gerade an den Punkt (4ln(3), f(4ln(3))) und liest Δx = 2,6 und Δy = 2 ab und erhält f'(4ln(3)) = 2/2,6=0,77.



Die Berechnung von f' liefert: $f'(x) = \frac{27}{18+e^{0,5x}+81e^{-0,5x}}$ und f'(4ln(3))=0,75.

d) $G_{f'}$ ist blau eingezeichnet.



e) (1) Aus dem Graph liest man für x = 0 y = 0,5 ab. Man kann auch f(0) = 5/10 ausrechnen. D.h. dass 1000 Stück verkauft waren. Da der Grenzwert y = 6 für x→∞ ist, rechnet man mit 6*2000=12000 verkauften Bikes.

(2) Die pro Tag verkaufte Stückzahl ist am größten, wenn die Steigung des Graphen am größten ist, also bei x = 4ln(3)≈4,4, was dann am 440. Tag ist. Vorher werden anfangs sehr wenige Bikes verkauft (für x<-3 ist f'(x) ≈0), dann nimmt der Verkauf der Stückzahlen pro Tag zu (f' wächst) bis zum 440. Tag. Danach nimmt die pro Tag verkaufte Stückzahl wieder ab. Ab dem 1200. Tag werden pro Tag nur noch ganz wenige Bikes verkauft.

(3) 90% des kalkulierten Absatzes sind erreicht, wenn f(x) = 0,9*6 = 5,4 ist. Somit ist die Gleichung $\frac{6}{1+9e^{-\frac{1}{2}x}} = 5,4$ zu lösen.

→ $1 + 9e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{10}{9}$

→ $e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{81}$

→ $x = 2\ ln81$ ≈8,79. Dies ist der 879. Tag.