



Das Zählprinzip – Teil 1

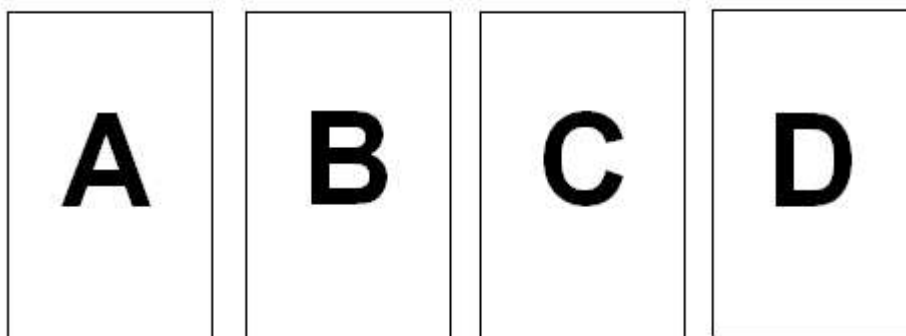
Kombinatorik ist nicht einfach! - Ruhe bewahren! - Jede Aufgabe erscheint anders!

Sehr viele Aufgaben aus dem Bereich des Zählprinzips lassen sich zurückführen auf sogenannte Urnenexperimente. Man legt Zettelchen oder Kugeln, die mit den „Elementarereignissen“ versehen sind in eine Urne und zieht dann einen Zettel bzw. eine Kugel.

Tip: alle Experimente lassen sich mit Kartenspielen spielerisch veranschaulichen!

1. In der Urne befinden sich lauter verschiedene Gegenstände, zum Beispiel vier!

Ob es sich dabei um Buchstaben, Namen oder Ziffern handelt, ist dabei gleich. Man stellt sich vor, man schreibt die entsprechenden Bezeichnungen auf Kärtchen und legt diese (verdeckt) in eine „Urne“.



Nun zieht man aus dieser Urne eine bestimmte Anzahl von Kärtchen
Da unterscheidet man insgesamt vier Grundtypen von „Experimenten“

	Ziehen mit Bedeutung der Reihenfolge	Ziehen ohne Bedeutung der Reihenfolge
Ziehen ohne Zurücklegen	ZoZ - mBdA	ZoZ - oBdA
Ziehen mit Zurücklegen	ZmZ - mBdA	ZmZ - oBdA

1.1. Ziehen mit Berücksichtigung der Reihenfolge:

Typische Aufgaben:

- Wieviele verschiedene vierstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 7, 8, 3 und 1 bilden?
- Wieviele verschiedene (auch sinnlose) Worte aus vier Buchstaben kann man aus den Buchstaben R, O, S und T bilden?
- Auf wie viele verschiedene Arten können Claudia, Deborah, Lara und Jana auf einer geraden viersitzigen Gartenbank Platz nehmen

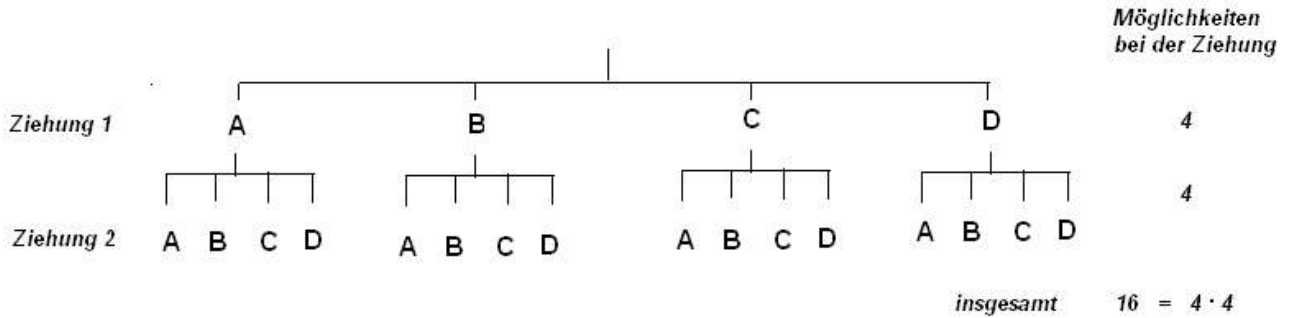
Während bei Aufgabe a) und b) zu unterscheiden ist, ob Ziffern oder Buchstaben mehrfach vorkommen dürfen (ZmZ) oder alle verschieden sein müssen (ZoZ), ist im Fall c) klar, dass nur das Modell ZoZ in Betracht kommt.

Alle Aufgaben lassen sich prinzipiell sowohl mit Baumdiagrammen lösen als auch rechnerisch beschreiben. Allerdings wird die Zahl der Zweige schnell unübersichtlich groß, so dass man beide Verfahren beherrschen muss!



Ziehen mit Zurücklegen

Dargestellt ist der Baum und die Berechnung für zwei Kärtchen werden gezogen. Man bildet also Zahlen aus zwei der vier Ziffern, zwei der vier Buchstaben!



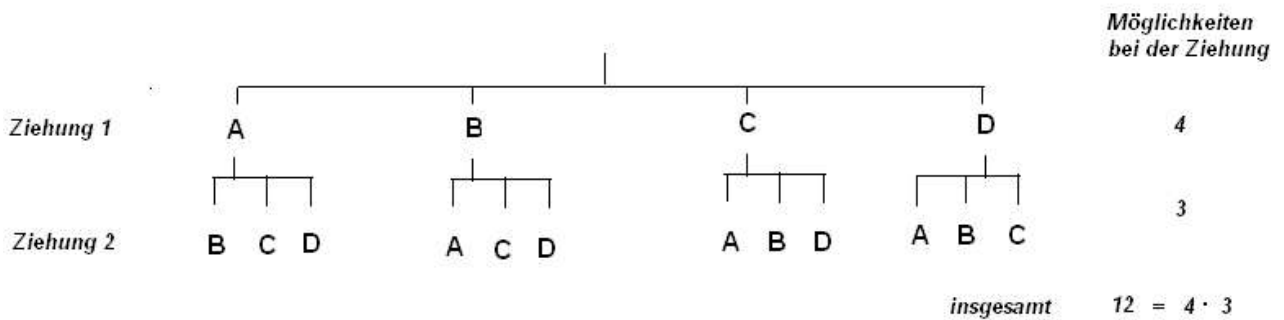
Varianten:

Wie verändert sich die Anzahl der Möglichkeiten, wenn man drei der vier Kärtchen und dreistellige Zahlen bzw. Worte aus 3 der vier Buchstaben bildet? ($n = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$)

Wie ändert sich die Anzahl der Möglichkeiten, wenn man alle 4 Kärtchen zieht? (Ergebnis: 256)

Ziehen ohne Zurücklegen!

Dargestellt ist der Baum und die Berechnung für zwei Kärtchen werden gezogen. Man bildet also Zahlen aus zwei der vier Ziffern, zwei der vier Buchstaben!



Varianten:

Wie verändert sich die Anzahl der Möglichkeiten, wenn man drei der vier Kärtchen und dreistellige Zahlen bzw. Worte aus 3 der vier Buchstaben bildet? ($n = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$)

Wie ändert sich die Anzahl der Möglichkeiten, wenn man alle 4 Kärtchen zieht? (Ergebnis: 24)



1.2. Ziehen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge bei lauter verschiedenen Gegenständen

Typische Aufgaben:

- a) In einer Urne befinden sich vier Kugeln mit den Zahlen 1,2,3 ,4 und 5. Man zieht 3 Kugeln (Z.o.Z). Man gewinnt, wenn man die 1 und 2 und 3 gezogen hat. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass man gewinnt, bzw. nicht gewinnt.
- b) In einer Bonboniere sind 5 verschiedene Tierfiguren. Man möchte beim dreimaligen Ziehen eine Schlange, einen Frosch und ein Krokodil ziehen. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt?

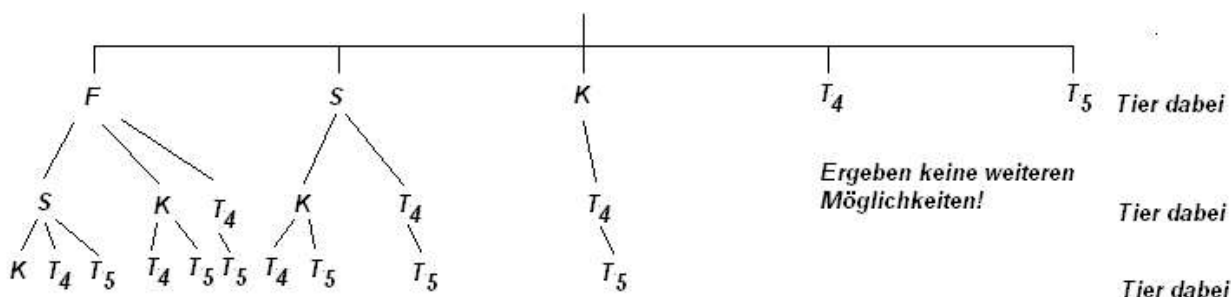
An diese Aufgaben geht man heran, indem zunächst so tut als wäre die Reihenfolge nicht egal (siehe 1.1.)

Demnach gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten für Tierzusammenstellungen (mBdA)

Nun überlegt man sich, auf wieviele verschiedene Arten die 3 verschiedenen Ziffern bzw. Tierfiguren angeordnet werden können:

Das ergibt: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Unter den 60 sind also jeweils 6 gleichartige Zusammenstellungen. Man muss nun $60 : 6 = 10$ rechnen und erhält 10 verschiedene Zusammenstellungen, wie man ebenfalls in einem Baumdiagramm darstellen kann.



Mögliche Zusammenstellungen: $ST_4T_5, FT_4T_5, KT_4T_5, SFT_5, SFT_4, KST_4, KST_5, FST_4, FST_5, KSF$

Allerdings dürfte wegen der Unübersichtlichkeit der Bäume, die nicht mehr symmetrisch wie unter 1.1 sind, bei diesen Fällen der rechnerischen Lösung der Vorzug zu geben!



2. In der Urne befinden sich nicht mehr nur gleiche Gegenstände

2.1. Der Fall alle werden gezogen, die Reihenfolge ist wichtig!

Typische Aufgaben:

- a) In einer Urne befinden sich die Buchstaben des Wortes STUSS. Wieviel verschiedene (auch sinnlose) Worte kann man auf einem SCRABBLE-Brett legen?
- b) Wie viel verschiedene fünfstellige Zahlen kann man aus den Ziffernkärtchen 1,1,1,2,3 legen?
- c) Drei Frauen, ein Mann und ein Affe nehmen auf einer fünfsitzigen Gartenbank Platz! Wieviel verschiedene Anordnungen gibt es, wenn die Sitze nummeriert sind? (unnummeriert ist das Beispiel wesentlich komplizierter)
- d) Wieviel Möglichkeiten gibt es 3 Damen, 1 König und 1 As in den Händen anzuordnen, wenn es nur um den Kartenwert, aber nicht die Kartenfarbe geht?

Die Lösung dieser Aufgaben lässt sich auf das Beispiel d) reduzieren:

Man hat in der Hand 5 Karten. Diese kann man auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene Arten anordnen. (Modell: ZoZ, mBdA)

Nun sind haben aber 3 Karten den gleichen Wert, die Farbe soll ja keine Rolle spielen. Diese drei Karten kann man auf $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten anordnen. Also ist die Lösung $120 : 6 = 20$

In die gleiche Aufgabengruppe gehören solche Aufgaben wie:

- a) Wieviel verschiedene Worte kann man aus den Buchstaben des Wortes ROSSINI oder MISSISSIPPI bilden?

Lösung: $n(\text{ROSSINI}) = 7! : (2! \cdot 2!) = 1260$
 $n(\text{MISSISSIPPI}) = 11! : (4! \cdot 2! \cdot 4!) = 34650$

Dass solche Aufgaben nicht mehr am Baumdiagramm gelöst werden können dürfte aufgrund der großen Anzahl ersichtlich sein!

2.2. Es werden nicht mehr alle gezogen und die Reihenfolge spielt keine Rolle

Dies ist einer der schwierigsten Fälle, denn jetzt muss man Fallunterscheidungen machen:

Typische Aufgaben:

- a) In einer Bonboniere befinden sich 3 rote, 2 gelbe und 1 blaues Gummibärchen. Man darf sich (blind) 3 Gummibärchen ziehen. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es?

Lösung: Fall 1: Man zieht die 3 roten => 1 Möglichkeit
Man hat 2 rote => 2 Möglichkeiten (drittes ist ein gelbes oder ein blaues)
Man hat 1 rotes => 1 Möglichkeit
Man hat 0 rote => 1 Möglichkeit

insgesamt 5 Möglichkeiten

- b) In einer Lostrommel befinden sich 4 Nieten („Leider nicht gewonnen“), 3 Kleingewinne und 2 (Hauptgewinne). Du darfst Dir drei Lose kaufen. Wieviel Möglichkeiten der Loszusammenstellung, die man gezogen hat gibt es?