Bisher

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = \frac{6}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ bzw. $f(x) = mx \Rightarrow f'(x) = m$

$f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$ bzw. $f(x) = m \Rightarrow f'(x) = 0$

noch nicht

$\boxed{f(x) = x^n}$ mit $n \geqq 3$

$f(x) = x^{-n}$ mit $n \geqq 2$

$f(x) = \sin x$

$f(x) = \cos x$

$\vdots$

$f(x) = x^n$ ges: Tangentensteigung in $(x_0; x_0^n)$

$$m = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^n} + n x_0^{n-1} h + \ldots + h^n - \cancel{x_0^n}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n x_0^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} h^2 + \ldots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left(n x_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}\right)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(n x_0^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} h}_{\to 0} + \underbrace{\ldots}_{\ldots} + \underbrace{h^{n-1}}_{\to 0}\right) = n x_0^{n-1}$$

Damit ist $f' : x \mapsto n x^{n-1}$ die Ableitungsfunktion von $f : x \mapsto x^n$.

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$ $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

$$(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^4$$

$$\vdots$$

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$$

Koeffizienten

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Pascalsche Dreieck

Ableitungsregeln:

Faktorregel: $k(x) = m \cdot f(x) \Rightarrow \boxed{k'(x) = m \cdot f'(x)}$ für $m = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

da $k'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{m \cdot f(x+h) - m \cdot f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{m \cdot (f(x+h) - f(x))}{h} = \underbrace{m \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)}$

$= m \cdot f'(x)$

Beispiele: $f(x) = 2{,}5\, x^2 \Rightarrow f'(x) = 2{,}5 \cdot 2x = 5x$

$f(x) = \frac{1}{8} x^4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8} \cdot 4x^3 = \frac{1}{2} x^3$

$=$

Summenregel $k(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \boxed{k'(x) = f'(x) + g'(x)}$

da $k'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) + g(x+h) - \big(f(x) + g(x)\big)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$

$= \underbrace{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{= f'(x)} + \underbrace{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{= g'(x)} = f'(x) + g'(x)$

Beispiele:

$f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$

$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

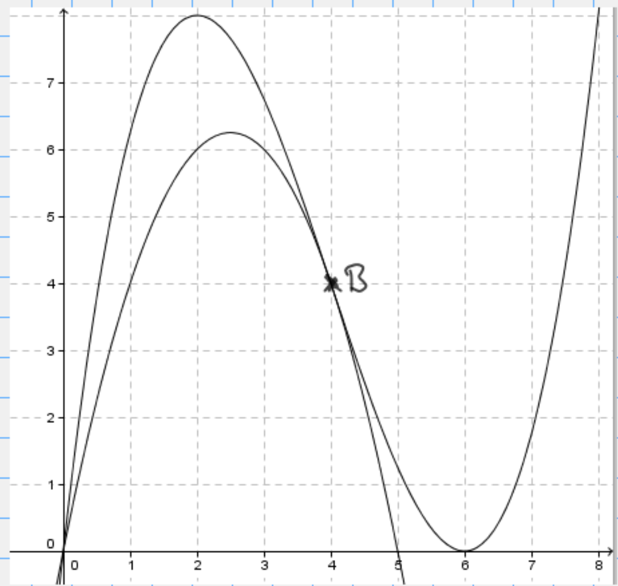
$f(x) = \frac{1}{1007} x^{2014} + \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{2014}{1007} x^{2013} + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 0$

$= 2x^{2013} + x^2 - 4x$

S. 38/9

$f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x$

$g(x) = -x^2 + 5x$



$f(x) = g(x)$

$0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x = -x^2 + 5x$

$0{,}25x^3 - 2x^2 + 4x = 0 \quad | \cdot 4$

$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$

$x(x^2 - 8x + 16) = 0$

$x \cdot (x-4)^2 = 0$

$x_1 = 0$ (einfache Nullstelle) $\Rightarrow$ G_f und G_g schneiden sich

$x_2 = 4$ (doppelte Nullstelle) $\Rightarrow$ G_f und G_g berühren sich

Steigung der Tangente von G_f in $(0;0)$: $f'(0) = 9$

Steigung der Tangente von G_g in $(0;0)$: $g'(0) = 5$

$f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 0{,}25 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 9 = 0{,}75x^2 - 6x + 9$

$g(x) = -x^2 + 5x \Rightarrow g'(x) = -2x + 5$

Steigung der Tangente von G_f in $(4;4)$: $f'(4) = -3$

Steigung der Tangente von G_g in $(4;4)$

$g'(4) = -3$

HA S. 38/11a, b